

Übungen zur Vorlesung Numerik I

(Blatt 2)

Sommersemester 2004

Abgabe bis 05.05.04, 10.00 Uhr im Postfach 84, Ebene 6

Aufgabe 1:

(6 Punkte)

In Aufwandsabschätzungen bei numerischen Algorithmen wird häufig die Landau-Symbolik verwendet. Es seien $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ und x_0 Häufungspunkt von X ($x_0 = \infty$ sei zugelassen). Die *Landauschen Symbole* $O(\cdot)$ und $o(\cdot)$ lassen sich folgendermaßen definieren:

$$\begin{aligned} f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) &\Leftrightarrow \limsup_{x \rightarrow x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} < \infty, \\ f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow x_0) &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Es seien $h_1 = O(f)$, $h_2 = O(g)$ und $h_3 = o(f)$. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Regeln:

- a) $h_1 + h_2 = O(|f| + |g|) \quad (x \rightarrow x_0)$
- b) $h_1 \cdot h_2 = O(f \cdot g) \quad (x \rightarrow x_0)$
- c) $h_2 \cdot h_3 = o(f \cdot g) \quad (x \rightarrow x_0)$

Aufgabe 2:

(4 Punkte)

Bestimmen Sie die Anzahl der Additionen und Multiplikationen die nötig sind um

- a) eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit einem Vektor $b \in \mathbb{R}^k$
- b) eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ mit einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{k \times m}$

zu multiplizieren.

Ein handelsüblicher PC schafft 1000 MFlops (Millionen Gleitpunktrechnungen pro Sekunde). Bestimmen Sie die Rechenzeiten für a) und b) für die Fälle $n = k = m = 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000$, indem Sie jede Addition und Multiplikation als Gleitpunktrechnung interpretieren! Verwenden Sie dabei geeignete Einheiten (z.B. 1 Stunde anstatt 3600 sek).

Aufgabe 3: (3 Punkte)

Geben Sie die angegebenen Zahlen in den jeweils fehlenden Darstellungen an:

Dezimal (Basis 10)	Dual (Basis 2)	Hexal (Basis 6)
4.5		
	10110	
		0.1

Zusatzfragen: (2 Zusatzpunkte)

1. Gibt es eine Zahl $x \neq 0$, die in dezimaler Darstellung endlich viele Nachkommastellen hat und in dualer Darstellung unendlich viele?
2. Welches Basis zwischen 2 und 23 ist Ihrer Meinung nach die geeignetste um eine möglichst kurze Darstellung aller Zahlen zu finden?

Begründen Sie ihre Antworten mathematisch.

Aufgabe 4: (3 Programmierpunkte)

Schreiben Sie ein Programm, welches die Maschinengenauigkeit eps Ihres Rechners sowie die kleinste und größte auf Ihrem Rechner darstellbare Zahl findet. Die Maschinengenauigkeit sei definiert als

$$eps := \inf_{x>0} \{x | 1.0 - x \neq 1.0\} \quad (2)$$

Hinweis: Beachten Sie die binäre Zahlendarstellung des Rechners.